ANDREAS SCHNEIDER

Mathebibel

Sponsored by Easy-Tutor

DIFFERENTIALRECHNUNG

DAS BUCH DER ERKLÄRUNGEN

Inhaltsverzeichnis

Differenzenquotient

In diesem Kapitel schauen wir uns an, was der Differenzenquotient ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Einordnung

Bei den linearen Funktionen sind wir zum ersten Mal dem Begriff „Steigung einer Funktion“ begegnet.

Wir kennen bereits die Steigungsformel,

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

mit deren Hilfe man aus zwei beliebigen Punkten $\mathrm{P}_0(x_0|y_0)$ und $\mathrm{P}_1(x_1|y_1)$ die Steigung m der Gerade berechnen kann.

Interessant ist, dass eine Gerade in jedem ihrer Punkte die gleiche Steigung besitzt, m also konstant ist.

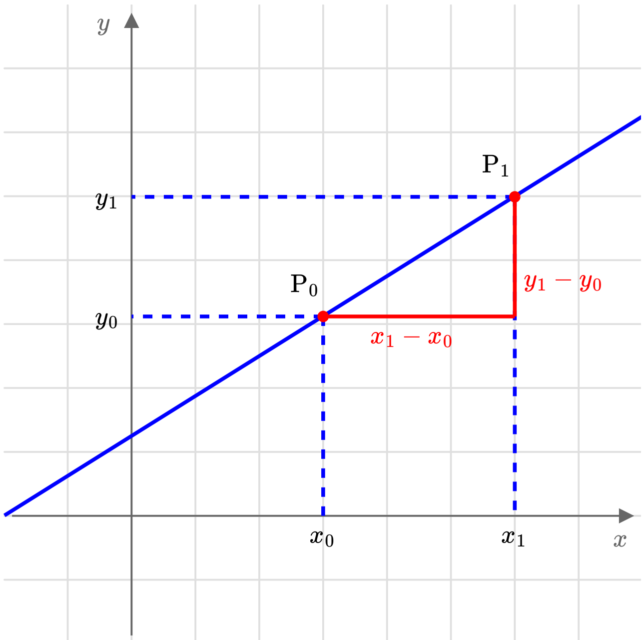

Abb. 1

Wir merken uns:

Eine **Gerade** besitzt eine konstante Steigung.

Quadratische Funktionen kennen wir auch schon: Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine spezielle Kurve namens Parabel.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, wie die Steigung einer Kurve (= gekrümmter Graph) definiert ist. Es leuchtet intuitiv ein, dass eine Kurve in zwei beliebigen Punkten P_0 und P_1 – außer in Sonderfällen – eine unterschiedliche Steigung besitzt. Die Steigung m nimmt folglich keinen konstanten Wert an.

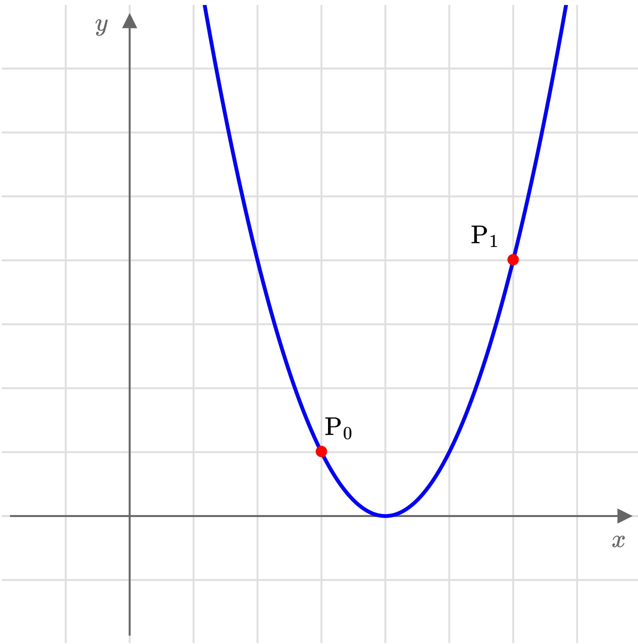

Abb. 2

Wir merken uns:

Eine **Kurve** besitzt keine konstante Steigung.

Fraglich bleibt, was man unter der Steigung einer Kurve überhaupt versteht und wie man diese berechnet. Die Antworten auf diese Fragen liefert die Differentialrechnung:

Mithilfe der Differentialrechnung können wir unser **Begriffsverständnis einer Steigung** von Geraden auf Kurven ausdehnen:

$$\text{Steigung einer Gerade} \xrightarrow{+\text{Differentialrechnung}} \text{Steigung einer Kurve}$$

2. Definition

Im Folgenden wollen wir herausfinden, wie die Steigung einer Kurve definiert ist.

Bloß, wie stellen wir das an?

Idee

Wir wenden das Steigungsdreieck auf eine Kurve an!

Das **Steigungsdreieck** haben wir erstmals im Kapitel zur Steigung einer linearen Funktion besprochen. Es diente zur Herleitung der Steigungsformel:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Dabei ist m die Steigung einer Gerade.

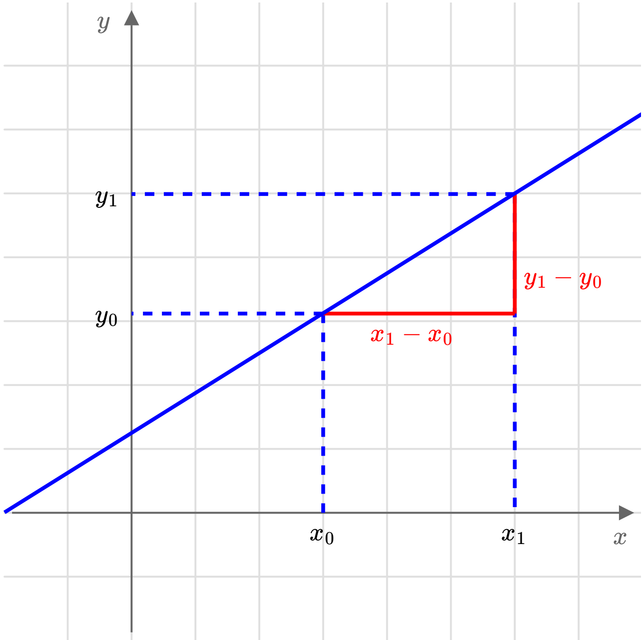

Abb. 3

Jetzt schauen wir uns an, was passiert, wenn wir das Steigungsdreieck bei einer Kurve zum Einsatz bringen.

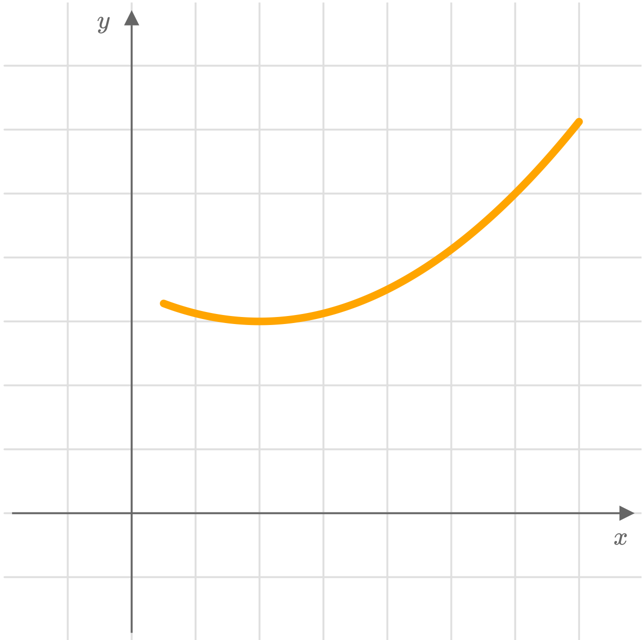

Abb. 4

Zunächst markieren wir zwei beliebige Punkte.

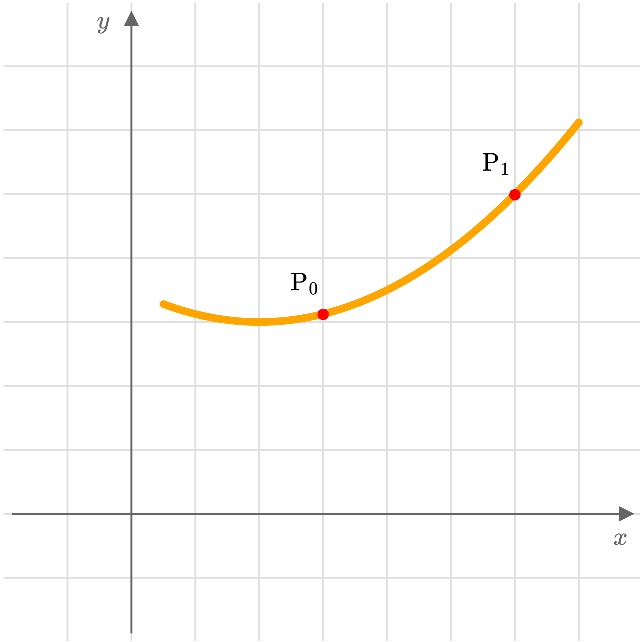

Abb. 5

Durch diese Punkte ziehen wir eine Gerade.

Eine Gerade, die durch zwei Punkte einer Kurve geht, bezeichnet man als **Sekante**.

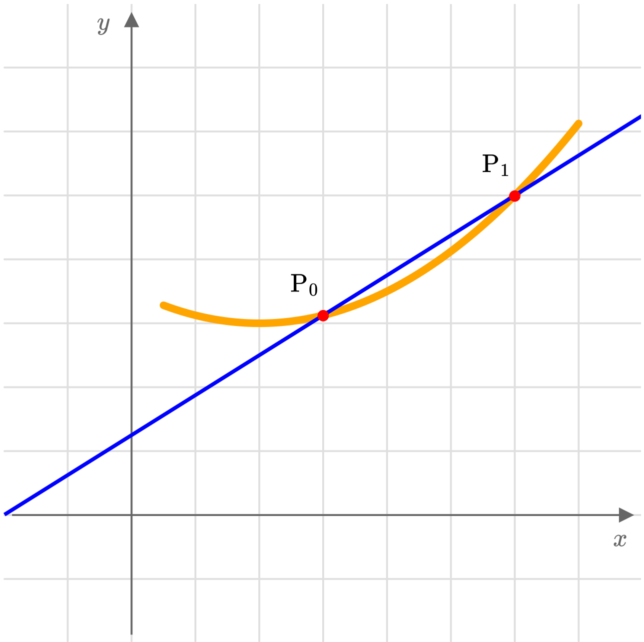

Abb. 6

Die Formel für die Steigung der Sekante lässt sich wieder über das Steigungsdreick herleiten.

Für die **Sekantensteigung** m gilt folglich:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Bei dieser Formel handelt es sich um den gesuchten Differenzenquotienten.

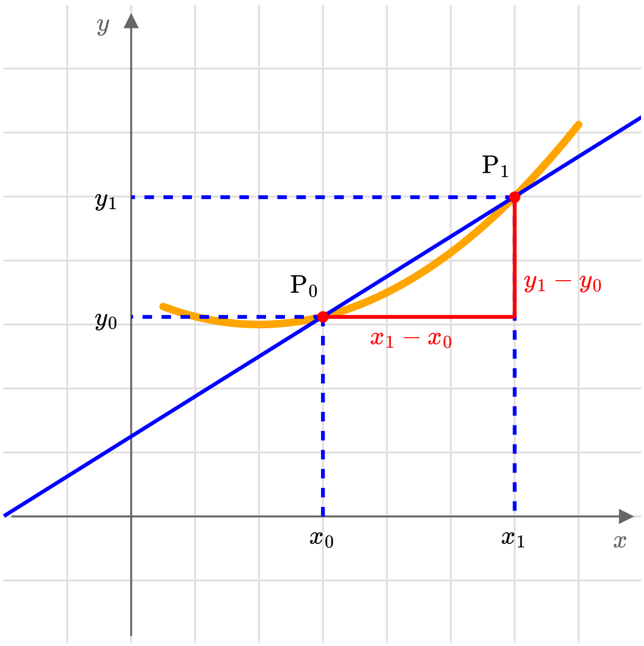

Abb. 7

Allerdings ist folgende Schreibweise für den Differenzenquotienten gebräuchlicher:

Es gilt: $y_1 = f(x_1)$ und $y_0 = f(x_0)$.

Der **Differenzenquotient** lautet folglich:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

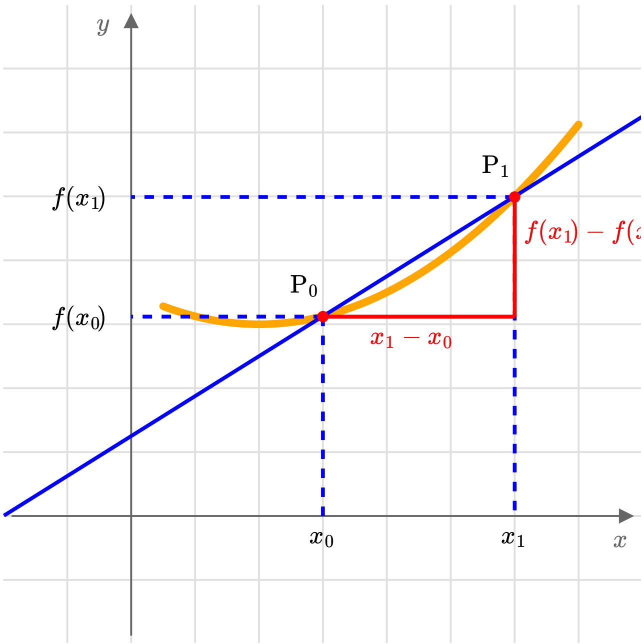

Abb. 8

Wir merken uns:

Differenzenquotient

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$