ANDREAS SCHNEIDER

Mathebibel

Sponsored by Easy-Tutor

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DAS BUCH DER ERKLÄRUNGEN

Inhaltsverzeichnis

Parameterform

Die Parameterform ist eine spezielle Form einer Geradengleichung oder Ebenengleichung in der analytischen Geometrie.

Inhaltsverzeichnis

1. Parameterform einer Gerade

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

Bedeutung

- g: Bezeichnung der Gerade
- $\vec{x}$: Punkt der Gerade
- $\vec{a}$: Aufpunkt (oder: Stützvektor)
- λ: Parameter („Lambda“)
- $\vec{u}$: Richtungsvektor

Beispiel 1

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt auf einer Gerade

Jeder Punkt einer Gerade wird in Abhängigkeit des Parameters λ beschrieben.

Beispiel 2

Gegeben sei die Gerade

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind drei verschiedene Punkte auf dieser Gerade. Dazu setzen wir beliebige Werte für λ ein.

$\boldsymbol{\lambda = 0}$

Bei $\lambda = 0$ handelt es sich um einen Spezialfall, denn der Aufpunkt liegt immer auf der Gerade!

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda = 1}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda = 2}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabentypen

Geradengleichung in Parameterform aufstellen

- mithilfe eines Punktes und eines Richtungsvektors
- mithilfe zweier Punkte
- Prüfen, ob ein Punkt auf einer Gerade liegt
- Schnittpunkte einer Gerade mit den Koordinatenachsen
- Lagebeziehungen von Geraden
- Identische Geraden
- Parallele Geraden

- Windschiefe Geraden
- Sich schneidende Geraden
- Schnittpunkt zweier Geraden
- Schnittwinkel zweier Geraden

2. Parameterform einer Ebene

$$E\colon\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

Bedeutung

- E: Bezeichnung der Ebene
- $\vec{x}$: Punkt der Ebene
- $\vec{a}$: Aufpunkt (oder: Stützvektor)
- λ: Parameter („Lambda“)
- $\vec{u}$: Richtungsvektor
- μ: Parameter („My“)
- $\vec{v}$: Richtungsvektor

Beispiel 3

$$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Punkt auf einer Ebene

Jeder Punkt einer Ebene wird in Abhängigkeit der Parameter λ und μ beschrieben. (vgl. Abschnitt „Punkt auf einer Gerade“)

3. Parameterform umformen

Parameterform gegeben	Parameterform gesucht
Parameterform in Koordinatenform	Koordinatenform in Parameterform
Parameterform in Normalenform	Normalenform in Parameterform

Koordinatenform

Die Koordinatenform ist eine spezielle Form einer Geradengleichung oder Ebenengleichung in der analytischen Geometrie.

Inhaltsverzeichnis

1. Koordinatenform einer Gerade

Eine Koordinatenform einer Gerade gibt es nur im $\mathbb{R}^2$.

(1) $ax_1 + bx_2 = c$

(2) $ax + by = c$

In der analytischen Geometrie verwendet man meist die Variablen x_1 und x_2, wohingegen man in der Analysis eher die Variablen x und y verwendet.

Beispiel 1

$2x_1 + 4x_2 = 9$

Beispiel 2

$5x - 3y = 7$

Spezialfälle

$a = 0$: Gerade verläuft parallel zur x_1-Achse (x-Achse)

Beispiel 3

$4x_2 = 9$

$b = 0$: Gerade verläuft parallel zur x_2-Achse (y-Achse)

Beispiel 4

$2x_1 = 9$

$c = 0$: die Gerade geht durch den Ursprung („Ursprungsgerade“)

Beispiel 5

$2x_1 + 4x_2 = 0$

$c = 1$: die Geradengleichung liegt in Achsenabschnittsform vor

In der Achsenabschnittsform lassen sich die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ablesen:

- Schnittpunkt mit der x-Achse bei $S_x(\frac{1}{a}|0)$
- Schnittpunkt mit der y-Achse bei $S_y(0|\frac{1}{b})$

Beispiel 6

$2x_1 + 4x_2 = 1$

$\Rightarrow S_x(\frac{1}{2}|0)$ und $S_y(0|\frac{1}{4})$

Normalenvektor ablesen

Ein Vektor, der auf einer Gerade, Kurve, Ebene oder gekrümmten Fläche senkrecht steht, heißt **Normalenvektor**.

Liegt die Gerade in Koordinatenform vor, lassen sich die Koordinaten des